

DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB
MATEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER, BIND XXV, NR. 15

ÜBER ARCHIMEDES' GRÖSSENLEHRE

VON

JOHANNES HJELMSLEV



KØBENHAVN

I KOMMISSION HOS EJNAR MUNKSGAARD

1950

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri.

1. Wenn man heutzutage die Schriften der alten Mathematiker studiert, fällt es einem bekanntlich sehr schwer, sich gegen den störenden Einschlag des modernen Wissenschaftsmechanismus in den Gedankengang zu wehren. Ein überraschendes Beispiel hierfür meine ich in der herrschenden Auffassung von Archimedes' Grössenlehre gefunden zu haben; es ist nämlich — wie mir scheint — wegen des genannten Umstandes bisher nicht geglückt, ganz auf den Grund von Archimedes' Gedankengang zu dringen.

2. Mit Archimedes, insbesondere mit seiner Schrift über Kugel und Zylinder, beginnt eine neue Epoche der griechischen Grössenlehre. Ganz neue Arten von Grössen wie Längen krummer Linien und Inhalte krummer Flächen werden in den Arbeitsbereich einbezogen, und für diese Grössen werden bestimmte Arbeitsregeln aufgestellt, die in den folgenden Voraussetzungen formuliert sind:

1°. Von allen Linien, die dieselben Punkte verbinden, ist die gerade die kürzeste.

2°. Von zwei konvexen Linien, die dieselben Punkte verbinden und von denen die eine die andere umschliesst, ist die äussere die grösste.

3°. Ein ebenes Flächenstück ist kleiner als jedes krumme Flächenstück mit demselben Rand.

4°. Von zwei konvexen Flächen, die dasselbe Ebenenstück überspannen und von denen die eine die andere umschliesst, ist die äussere die grösste.

5°. Von zwei von einander verschiedenen Grössen derselben Art (Linien, Flächen, Raumstücke) übertrifft die grössere die kleinere um eine Grösse, die hinreichend oft zu sich selbst addiert jede im voraus gegebene Grösse derselben Art übertrifft.

3. Die letzte Annahme 5° (Archimedes' Lemma) soll hier zum Gegenstand einer eingehenden Betrachtung gemacht werden.

Sie enthält das Hilfsmittel für eine Verallgemeinerung der Hauptsätze der uns aus Euklids 5. Buch bekannten, von Eudoxos begründeten Grössenlehre, die ihre Anwendung auch auf die neuen Grössen ermöglicht.

Zunächst werden natürlich aus Eudoxos' Proportionenlehre die einleitenden Definitionen direkt übernommen, in erster Linie

A. Eudoxos' Axiom (Euklid V, Def. 4), das die Grundlage dafür bildet, dass überhaupt von einem Verhältnis zweier Grössen a und b gesprochen werden kann:

Von zwei Grössen wird gesagt, dass sie ein Verhältnis besitzen, wenn sie durch Vervielfachung einander übertreffen können.

$$(a < b, \quad a + a + \cdots + a > b.)$$

Ferner

B. Die Definition der Gleichheit zweier Verhältnisse a/b und c/d :

Für jedes Paar natürlicher Zahlen m, n soll aus $ma \gtrsim nb$ bzw. $mc \gtrsim nd$ folgen.

C. Die Definition der Ungleichheit zweier Verhältnisse:

$a/b > c/d$, wenn es ein Paar natürlicher Zahlen m, n derart gibt, dass $ma > nb$, aber $mc \leq nd$.

Aus der Proportionenlehre selbst wird in Archimedes' Untersuchungen insbesondere die Hauptregel gebraucht, die besagt, dass aus $a \gtrsim b$ bzw. folgt $a/c \gtrsim b/c$ (oder $c/a \lesssim c/b$). Aber der Beweis dieses Satzes (für das obere Ungleichheitszeichen) erfordert (Euklid V, 8), dass es eine ganze Zahl n derart gibt, dass

$$n(a - b) > c$$

ist. Dies war in der Proportionenlehre von Eudoxos eine direkte Folge seines Axioms, da $a - b$ in dem von ihm betrachteten Bereich stets als Grösse derselben Art wie die gegebenen existiert; innerhalb des neuen Grössenbereichs, mit dem Archimedes nun zu arbeiten hatte, konnte man aber keineswegs ohne weiteres hiervon ausgehen. Was soll man z. B. unter $a - b$ verstehen, wenn a ein Kreisbogen und b eine Strecke ist? Oder wenn a eine Kugelfläche und b ein ebenes Flächenstück ist?

Archimedes wählte den Ausweg, sein Lemma als eine letzte

Voraussetzung über die neuen Grössen, oder, wenn man will, als Bestandteil der Definitionen derselben aufzustellen: Wenn $a > b$ ist, ist die Differenz $a - b$ eine ideale Grösse, für die dieselbe Arbeitsregel gelten soll wie in Eudoxos' Grössenlehre, nämlich dass stets eine ganze Zahl derart existiert, dass $n(a - b)$ grösser ist als eine im voraus gegebene Grösse c von derselben Art wie a und b .

4. Dass Archimedes das so gemeint hat, kommt bereits deutlich in der Vorsicht, man möchte beinahe sagen Ehrfurcht, zum Ausdruck, mit der er in seinen einleitenden Briefen sein Lemma erwähnt (schon in der Schrift über die Quadratur der Parabel, besonders aber in der Schrift über Kugel und Zylinder, wo die eigentliche Grundlage erstmalig aufgestellt ist, und später auch in der Schrift über die Spiralen). Es geht dies aber mit voller Sicherheit aus dem ganzen systematischen Aufbau von Archimedes' Lehre hervor, wie dies im folgenden näher beleuchtet werden soll. Bisher scheint man keinen Blick für die genannte Bedeutung von Archimedes' Lemma gehabt zu haben. Man hat dieses Lemma einfach als gleichbedeutend mit Eudoxos' Axiom aufgefasst, und es ist sogar bekanntlich heutzutage weit verbreiteter mathematischer Sprachgebrauch, Eudoxos' Axiom als Archimedes' Axiom zu bezeichnen¹. Man hat sogar die Auffassung vertreten, dass Archimedes selbst voraussetzte, dass ein Verhältnis immer als das Verhältnis zweier Strecken dargestellt werden kann. Dass dies ein offensichtliches Missverständnis ist, geht doch bereits aus dem Umstand hervor, dass Archimedes' Lemma danach vollständig überflüssig wäre.

5. Wir gehen nun zu einer näheren Begründung über, indem wir ein konkretes Beispiel einer Beweisführung von Archimedes,

¹ Der Fehler geht zurück auf O. STOLZ: Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes (»Eine Grösse kann so oft vielfältig werden, dass sie jede andere ihr gleichartige übertrifft«); Innsbr. Ber. XII, 1882; Math. Ann. 22.

Später wurde er übernommen von G. VERONESE: Fondamenti di geometria . . . , 1891; deutsche Ausgabe: Grundzüge der Geometrie . . . , 1894; Fussnote auf Seite 95: »Stolz ist, soviel wir wissen, der erste gewesen, der die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf diesen von ihm mit Recht »Axiom des Archimedes« genannten Satz gelenkt hat . . .«.

Schliesslich wurde derselbe Name (»Archimedisches Axiom«) von HILBERT in seinen Grundlagen der Geometrie, 1899 gebraucht.

ZEUTHEN hat mehrmals gegen diese fehlerhafte Benennung protestiert (u. a. auf dem Heidelberger Kongress 1904).

nämlich für den Satz 2 der Schrift über Kugel und Zylinder durchgehen. Wir beginnen mit einer freien Wiedergabe nach T. L. HEATH, *The Works of Archimedes*, p. 5. Der Satz lautet folgendermassen:

Sind zwei von einander verschiedene Grössen gegeben, so ist es stets möglich, zwei von einander verschiedene Strecken zu finden, für die das Verhältniss (der grösseren zur kleineren) kleiner als das Verhältniss (der grösseren zur kleineren) der gegebenen Grössen ist.

Es mögen AB und D die beiden gegebenen, von einander verschiedenen Grössen symbolisieren, und es sei $AB > D$. Die Differenz $AB - D$ sei durch AC dargestellt, wo also D als BC abgezogen ist. Nach Archimedes' Lemma kann die ganze Zahl n so gross gewählt werden, dass n mal AC die Grösse D übertrifft, also so dass $n \cdot AC = AF$ grösser als CB ist. Auf der Geraden l wählen wir nun die Punkte E, H, G derart, dass GH gleich n mal HE ist. Dann gilt

$$EH/HG = AC/AF.$$

Da aber $AF > D$ (oder BC) ist, gilt

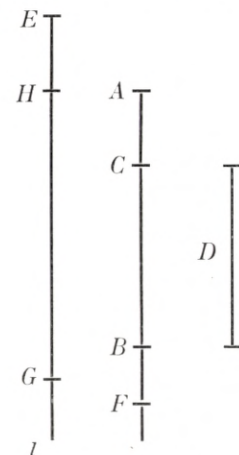
$$AC/AF < AC/BC$$

und daher auch

$$EH/HG < AC/BC,$$

also (componendo)

$$EG/GH < AB/D,$$



6. Zu dem wiedergegebenen Beweis fügen wir nun folgende Bemerkungen: Die gegebenen Grössen werden in der Figur durch Strecken (AB und D , $AB > D$) dargestellt (symbolisiert), so dass die Differenz (AC) und zugleich das Vielfache von ihr, das Archimedes' Lemma zufolge D übertrifft, leicht symbolisiert werden können. Dies alles ist aber nur eine symbolische Darstellung, damit man die betreffenden Grössen in Gedanken festhalten kann. Daneben ist eine wirkliche Gerade l dargestellt, auf der die gesuchten Strecken angebracht werden.

Es ist sehr wichtig, dass man beim Studium von Archimedes an dieser Unterscheidung zwischen allgemeinen Grössen und Strecken festhält. Der vorliegende Satz 2 findet eine seiner wichtigsten Anwendungen beim Beweis dafür, dass die Oberfläche O der Kugel gleich dem Vierfachen des Grosskreises c ist (Satz 33). Der Beweis wird indirekt durch den Nachweis geführt, dass O weder grösser noch kleiner als $4c$ sein kann, und zwar beide Male mit Hilfe von Satz 2, wobei die gegebenen Grössen O und $4c$ sind, die durch »dazu proportionale Strecken« zu ersetzen Archimedes natürlich nicht einfällt.

7. Dieser Bemerkung gegenüber steht allerdings die folgende merkwürdige Tatsache:

Der überlieferte griechische Text (Heibergs Archimedes-Ausgabe I, p. 14—15) enthält einen Hinweis auf Euklids Elemente I, 2 in Verbindung mit der in der Figur angegebenen Einführung von Differenzen (in der obigen Figur: AC) der vorgelegten Grössen AB und D , als ob diese etwas mit der in Euklid I, 2 (was übrigens jedenfalls ein Schreibfehler für I, 3 sein muss) angegebenen Konstruktion zu tun hätte! Heiberg führt in einer Fussnote hierzu ein Zitat von Proclus an, aus dem hervorgehen sollte, dass die Archimedes-Texte schon damals denselben Hinweis auf Euklid enthielten. Der Hinweis ist aber jedenfalls vollkommen naiv und muss von einem nicht sachkundigen Abschreiber eingesetzt worden sein.

Dass ZEUTHEN sich in einer Abhandlung aus dem Jahre 1909² durch den genannten Hinweis dazu verleiten liess, allgemein über Archimedes' Grundlagen zu äussern: »Ein Verhältnis kann immer als das Verhältnis zweier Strecken dargestellt werden«, ist ganz unverständlich. Archimedes kann so etwas nicht gedacht haben. Er hat nirgends eine Voraussetzung darüber gemacht, und mit den Voraussetzungen, die er gemacht hat, kann er dies nicht beweisen.

Wenn dem so wäre, hätte er sich die Mühe mit seinen Überlegungen im Beweis von Satz 2 sparen können: Er hätte sich dann nämlich damit begnügen können, darauf hinzuweisen, dass die beiden gegebenen Grössen zu zwei Strecken proportional sind, und danach bloss die grösste von ihnen etwas zu verkleinern.

² Über einige archimedische Postulate (Archiv f. d. Gesch. der Naturwissenschaften und der Technik I, 1909).

8. Wir setzen unsere Erörterung des Beweises von Satz 2 fort. Der nächste Punkt, der besprochen werden soll, ist folgender.

Aus $AF > BC$ wird geschlossen, dass $AC/AF < AC/BC$ ist. Wir formulieren die Regel, die hier benutzt wird, mit einfacheren Bezeichnungen so:

Aus $a > b$ folgt $c/a < c/b$.

Sie ist aus Eudoxos' Proportionenlehre übernommen und wird dort, wie früher (3) erwähnt, daraus geschlossen, dass man eine ganze Zahl n derart finden kann, dass $n(a-b) > c$ ist, was aus Eudoxos' Axiom folgt, wenn a und b Grössen sind, deren Differenz sich als Grösse derselben Art wie die gegebenen erweist. Wenn aber a und b allgemeinere Grössen sind wie hier in Archimedes' Grössenlehre, führt diese Bedingung notwendigerweise zur Aufstellung von Archimedes' Lemma.

9. Die letzte, den Beweis von Satz 2 betreffende Frage, auf die wir eingehen wollen, ist der Übergang von der Ungleichung

$$EH/HG < AC/BC$$

zur Ungleichung

$$EG/GH < AB/D$$

oder in einfacheren Bezeichnungen von

$$a/b < c/d$$

zu

$$a + b/b < c + d/d.$$

Für diesen Schluss gibt Archimedes keinen Beweis, und er ist auch nicht in den Elementen erwähnt (bei Euklid findet sich nur der entsprechende Satz mit dem Gleichheitszeichen (V, 18)). In EUTOKIOS' Kommentar findet sich ein Beweis, den wir hier wiedergeben wollen:

Man findet zunächst eine Grösse x derart, dass

$$b/a = d/x \text{ oder } a/b = x/d$$

gilt, woraus nach Euklid V, 18

$$a + b/b = x + d/d$$

folgt. Es ist aber $a/b < c/d$, also $x/d < c/d$, $x < c$, folglich

$$x + d < c + d, \quad x + d/d < c + d/d.$$

Da aber

$$x + d/d = a + b/b,$$

folgt

$$a + b/b < c + d/d \qquad \text{q. e. d.}$$

Ein ähnlicher Beweis findet sich bei PAPPUS. Zu diesen Beweisen ist indessen zu bemerken, dass sie Archimedes' Zwecken nicht angepasst sind. Sie gründen sich nämlich auf die Existenz der vierten Proportionalen zu drei Grössen b, a, d :

$$b/a = d/x,$$

wenn die Grössen der einen Seite (b und a) Strecken, die der anderen (d und x) aber allgemeine Grössen sind. Die Existenz einer solchen vierten Proportionalen fällt jedoch ganz ausserhalb der von Archimedes gemachten Voraussetzungen und kann aus ihnen nicht gefolgert werden.

Hierdurch wird man auf ähnliche Fragen wie oben geführt, nämlich ob man voraussetzen kann, dass Strecken existieren, die zwei gegebenen allgemeinen Grössen proportional sind, eine Voraussetzung, die Archimedes nicht zur Verfügung hat und die er sich in seiner ganzen Darstellung der allgemeinen Grössenlehre (in der Schrift über Kugel und Zylinder und in späteren Schriften) mit vollem Erfolg zu vermeiden bemüht hat.

Die Beweise von Eutokios und Pappos können also nicht als Kommentare zu Archimedes' letztem Schluss im Beweise von Satz 2 dienen. Bei genauerer Betrachtung sieht man, dass ein Kommentar eigentlich auch überflüssig ist. Der fragliche Satz folgt nämlich direkt aus der Definition der Ungleichheit:

Aus $a/b < c/d$, das heisst $ma < nb$, $mc \geq nd$ folgt nämlich $m(a + b) < (m + n)b$, $m(c + d) \geq (m + n)d$ also

$$a + b/b < c + d/d,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Archimedes hat es offensichtlich für überflüssig gehalten, diesen Beweis anzuführen.

10. Um die vorstehend erörterten fundamentalen, das Verständnis von Archimedes' Grössenlehre betreffenden Fragen näher zu beleuchten, wollen wir mit modernen Hilfsmitteln ein arithmetisches Beispiel konstruieren: Wir betrachten eine Koordinatengeometrie mit pythagoreischer Massbestimmung, wo die Koordinaten nicht alle reellen Zahlenwerte, sondern nur die algebraischen annehmen können. In dieser Geometrie kann man eine Grössenlehre aufbauen, in der sämtliche Voraussetzungen von Archimedes gelten. Es gibt aber in dieser Geometrie keine Strecke, die einer Kreisperipherie gleich ist. Hieraus folgt weiter, dass keine zwei Strecken a und b existieren, die einer vorgegebenen Strecke l und einer Kreisperipherie c proportional sind. Sonst würde nämlich die vierte Proportionale der Strecken a, b, l eine Strecke sein, die gleich c ist.

Hiermit ist aber bewiesen, dass Archimedes' Grössenlehre weder explizit noch implizit eine Voraussetzung darüber enthält, dass stets zwei Strecken existieren, die zu zwei gegebenen allgemeinen Grössen proportional sind, oder dass es stets eine vierte Proportionale zu drei gegebenen Grössen gibt.

11. Dass Archimedes innerhalb seiner Grössenlehre die Existenz einer Strecke, die einer vorgelegten Kreisperipherie gleich ist, nicht beweisen kann, folgt ebenfalls aus dem obigen Beispiel. Er hat vielmehr mit Vorbedacht keine Voraussetzung über die Existenz einer solchen Strecke in seine Grössenlehre aufgenommen, was mit grosser Deutlichkeit aus dem Satz 4 der Schrift über die Spiralen hervorgeht:

Sind zwei von einander verschiedene Linien, nämlich eine Strecke und eine Kreisperipherie gegeben, so ist es möglich, eine Strecke zu finden, die kleiner als die grösste und grösser als die kleinste dieser beiden Linien ist.

Der Beweis wird so geführt: Ist c die Kreisperipherie und l die Strecke, und ist $c > l$, so kann l (nach Archimedes' Lemma) in so viele gleich grosse Teile geteilt werden, dass jeder kleiner als die Differenz von c und l ist; danach kann einer dieser

Teile zu l addiert werden, wodurch man gerade eine Strecke der gesuchten Art erhält.

Wäre Archimedes hier davon ausgegangen, dass c gleich einer bestimmten Strecke ist, läge kein Grund dazu vor, den obigen Satz aufzustellen, da seine Aussage dann selbstverständlich wäre.

12. Es ist jedoch interessant zu sehen, wo der Satz später verwendet wird. Dies geschieht bei der Untersuchung der Tangenten der Spirale, in Satz 18, der in moderner Sprache besagt, dass die Polarsubtangente OB im Endpunkt A der ersten Windung OA der Spirale gleich der Peripherie eines Kreises mit dem Radius OA ist. Der Beweis (den wir nicht wiedergeben wollen) läuft darauf hinaus zu zeigen, dass die Polarsubtangente weder grösser noch kleiner als die genannte Kreisperipherie sein kann.

Die Existenz der Spiralentangente, die Archimedes offenbar nicht bezweifelt, hat also die Existenz einer Strecke zur Folge, die der Peripherie eines gegebenen Kreises gleich ist. Es liegt nahe anzunehmen, dass Archimedes von dem Augenblick, wo ihm diese Tatsache bekannt wurde, hierin ein gewisses ergänzendes Fundament gesehen hat, das ihm ermöglicht, weitergehende Untersuchungen über die Rektifikation und Quadratur des Kreises einzuleiten, die dann später in der Schrift über die Kreismessung ausgeführt sind.

Nachdem Archimedes' Methodenlehre 1906 gefunden und gedeutet war, neigten zwar HEIBERG und ZEUTHEN — veranlasst durch eine bestimmte Äusserung darin — im Gegensatz zu früher der Auffassung zu, dass die Schrift über die Kreismessung vor der Schrift über Kugel und Zylinder entstanden sei. Die fragliche Äusserung lautet in Heibergs Übersetzung³ folgendermassen:

»Durch diesen Lehrsatz, dass eine Kugel viermal so gross ist als der Kegel, dessen Grundfläche der grösste Kreis, die Höhe aber gleich dem Radius der Kugel, ist mir der Gedanke gekommen, dass die Oberfläche einer Kugel viermal so gross ist als ihr grösster Kreis, indem ich von der Vorstellung ausging, dass, wie ein Kreis einem Dreieck gleich ist, dessen Grundlinie die Kreisperipherie, die Höhe aber dem Radius des Kreises gleich,

³ J. L. HEIBERG und H. G. ZEUTHEN, Eine neue Schrift des Archimedes, Bibl. Math., Dritte Folge, VII, S. 328.

ebenso ist die Kugel einem Kegel gleich, dessen Grundfläche die Oberfläche der Kugel, die Höhe aber dem Radius der Kugel gleich.«

Aber die »Vorstellung«, von der hier die Rede ist, war ja zweifellos zu Archimedes' Zeit so alt — sie muss jedenfalls auf die Studien über die Quadratrix zurückgehen — dass der Umstand, dass sie im oben genannten Zusammenhang erwähnt ist, keinen besonderen Anlass gibt, die Schrift über die Kreismessung gleichzeitig mit oder vor der Methodenlehre zu datieren.

Von grösserem Gewicht dürfte — neben der obigen Betrachtung in der Schrift über die Spiralen — sein, dass nicht nur einige einleitende Sätze über ein- und umbeschriebene Polygone aus der Grössenlehre der Schrift über Kugel und Zylinder (unter Prop. 1 und Prop. 6) in der Schrift über die Kreismessung angewendet werden, sondern dass auch einer dieser Sätze (der letzte unter Prop. 6), »dass es möglich ist, einem Kreis ein Polygon zu umschreiben, dessen Inhalt den Inhalt des Kreises um eine Grösse übertrifft, die kleiner als ein gegebener Flächeninhalt ist«, in beiden Schriften bewiesen ist, und zwar auf einfachere Weise in der Schrift über die Kreismessung. Es kann daher kein Zweifel darüber herrschen, in welcher Reihenfolge diese Beweise gefunden worden sind.

13. Archimedes hat wie gesagt keine Möglichkeit, aus seinen Grössenvoraussetzungen allein die Existenz einer Strecke zu schliessen, die gleich der Peripherie eines gegebenen Kreises ist. Er ist sich aber sicher darüber im Klaren gewesen, dass das Verhältnis zwischen der Peripherie und dem Durchmesser eines Kreises im Gegensatz zum Verhältnis zwischen der Oberfläche und dem Grosskreis einer Kugel, das durch die einfache ganze Zahl 4 ausgedrückt werden konnte, von wesentlich komplizierterer Beschaffenheit ist, so dass es nur mit Hilfe von grösseren und kleineren Zahlen beschrieben werden kann.

Die Untersuchungen, die es ihm mit Hilfe seiner Grössenlehre gelang durchzuführen, stehen den modernen Existenzbeweisen so nahe, dass das fehlende Hilfsmittel nur von formaler Natur ist: eine Erweiterung der eudoxischen Proportionenlehre für Strecken, die auch »unabgeschlossene Strecken« umfasst. Zu diesem Begriff kommt man auf folgende Weise: Wenn auf einer Strecke AB eine Reihe von Strecken AA_1, AA_2, \dots vorliegt, von

denen jede in der folgenden enthalten ist, und wenn keine Strecke existiert, die von dieser Reihe ausgeschöpft wird, dann definiert die Punktmenge, die sie umfasst, eine »unabgeschlossene Strecke«. Alle abgeschlossenen und unabgeschlossenen Strecken machen einen Grössenbereich aus, für den die ganze eudoxische Proportionenlehre leicht als gültig nachgewiesen werden kann, sobald man die äusserst naheliegenden Definitionen für Summe, Differenz, grösser und kleiner eingeführt hat. Und damit gelangt man direkt von der antiken zur modernen Grössenlehre.

Aber nicht weniger interessant ist es, dass die eudoxisch-archimedische Lehre selbst auf Bereiche angewendet werden kann, die nicht im eigentlichen Sinne stetig sind. In Archimedes' Voraussetzungen liegt ja — wie wir nachgewiesen haben — nicht, dass der Grössenbereich stetig ist, und die Anwendungsmöglichkeiten sind daher keineswegs auf unser gewöhnlich vorgezogenes Kontinuum beschränkt. In einer späteren Arbeit soll gezeigt werden, dass sich die Anwendbarkeit von Archimedes' Lehre mit geringfügigen Änderungen auf die empirische Wirklichkeitsgeometrie (ohne die Voraussetzung der Existenz unbegrenzter Vielfacher oder unbegrenzter Teilbarkeit) und auf die nicht-eudoxische Geometrie ausdehnen lässt.
